



ce
pre
UNI

Trigonometría

ÁREA DE REGIONES TRIANGULARES I

**CICLO
PRE 2024-I**





ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR



RELACIÓN FUNDAMENTAL

Dado el triángulo ABC adjunto:

Donde las longitudes de sus lados, medidos en u;
son: $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$

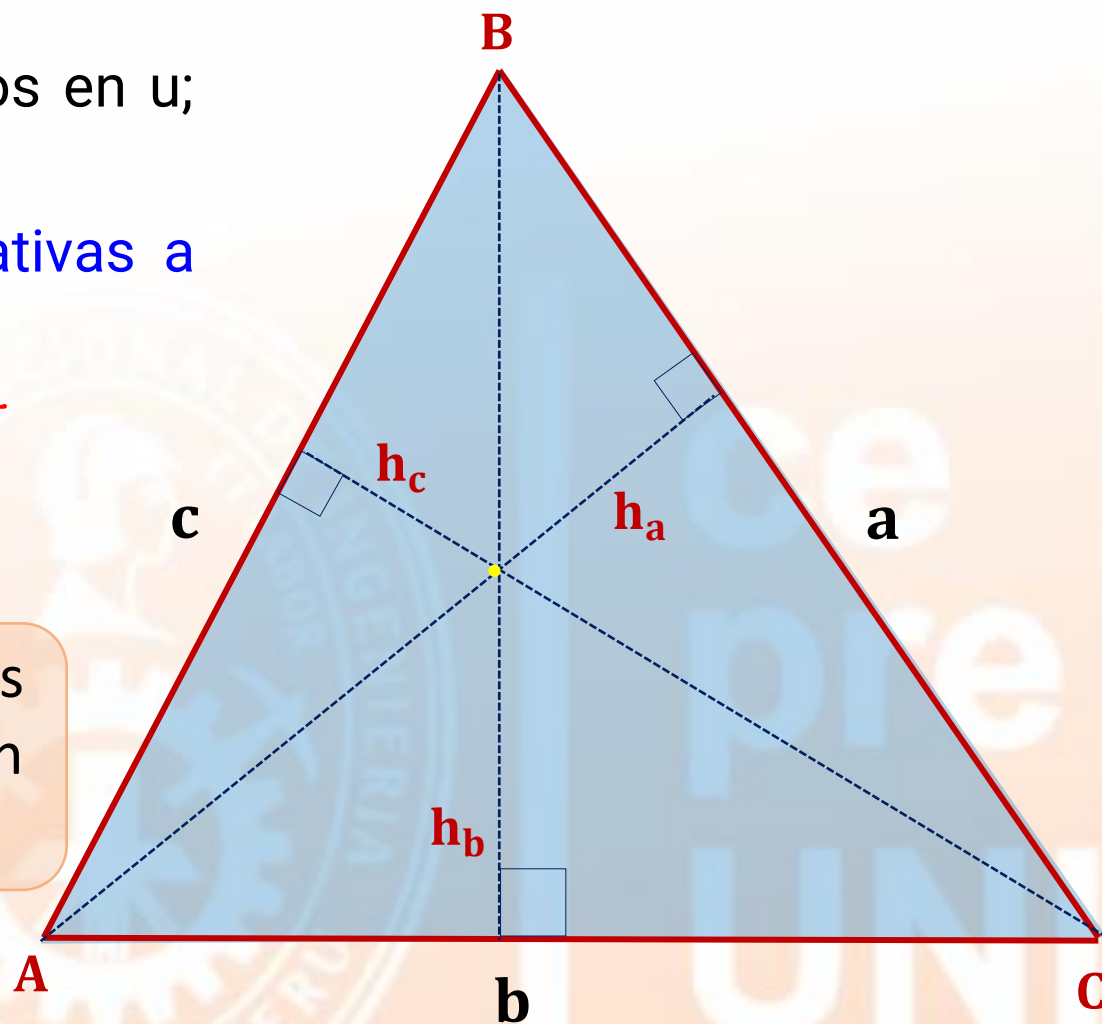
Además, las longitudes de las alturas relativas a dichos lados miden:

h_a : longitud de la altura relativa al lado $\overline{BC}$

h_b : longitud de la altura relativa al lado $\overline{AC}$

h_c : longitud de la altura relativa al lado $\overline{AB}$

TEOREMA. El área de una región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de un lado y la altura correspondiente a dicho lado.



$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$S = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

$$S = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

PROBLEMA 1

En un triángulo ABC, en donde $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, las longitudes de las alturas relativas a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son h_a y h_b , respectivamente. Si $h_a^2 + h_b^2 + h_a h_b = c^2 \sin^2(C)$, calcule el valor de $\cos(C/2)$.

- A) $1/2$ B) $\sqrt{2}/2$ C) $\sqrt{3}/2$ D) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$ E) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$

CLAVE: A**PROBLEMA 2**

En un triángulo acutángulo ABC, en donde $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, las longitudes de las alturas relativas a los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son h_a , h_b y h_c , respectivamente. Si $S = h_a h_b \cos(B) + h_a h_c \cos(C)$ y el circunradio mide $2u$, calcule el valor máximo (en u^2) del área S de la región triangular ABC.

- A) $1 + \sqrt{2}$ B) $2 + \sqrt{2}$ C) $1 + \sqrt{3}$ D) $2 + \sqrt{3}$ E) $3 + \sqrt{3}$

CLAVE: D

TEOREMA

El área de una región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de dos lados y el seno de la medida del ángulo que determinan dichos lados.

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2} \sin(C) = \frac{a \cdot c}{2} \sin(B) = \frac{b \cdot c}{2} \sin(A)$$

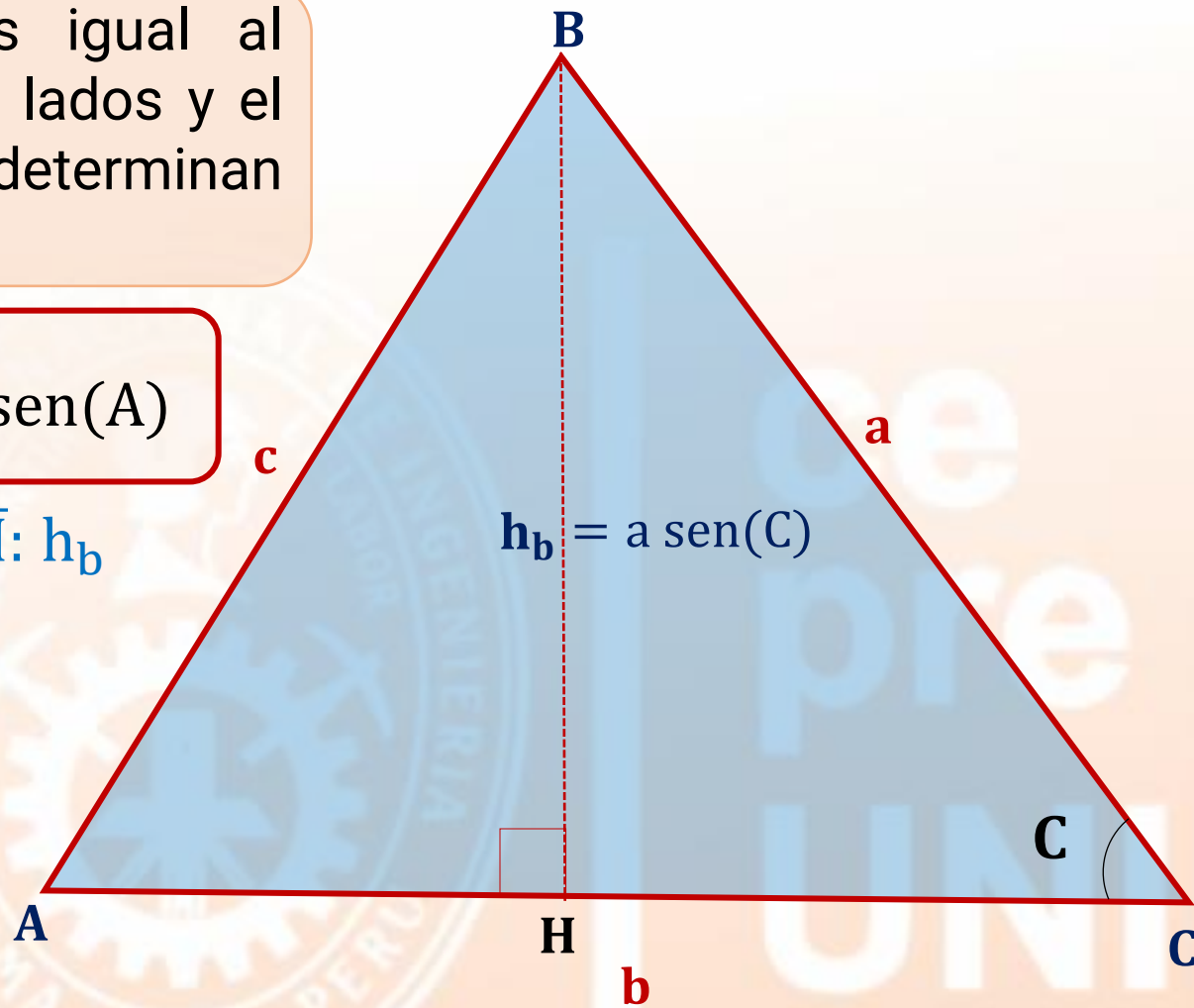
Para demostrar, trazamos la altura $\overline{BH}$: h_b

$$\triangle CHB: h_b = a \cdot \sin(C)$$

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h_b}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{b(a \cdot \sin(C))}{2}$$

$$\therefore S_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2} \sin(C)$$

Utilizando las longitudes de dos lados y la medida del ángulo que forman:



PROBLEMA 3

En un triángulo ABC, h_a , h_b y h_c son las longitudes de las alturas trazadas desde los vértices A, B y C, respectivamente y $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Si $6(h_a \cos(A) + h_b \cos(B) + h_c \cos(C)) = 5a \cdot \sin(A)$, ¿qué tipo de triángulo es?

- A) Isósceles B) Equilátero C) Acutángulo D) Rectángulo E) Obtusángulo

CLAVE: E**PROBLEMA 4 (6ta PC CEPRE UNI 2019-2)**

En un triángulo ABC ($AB = c$ cm, $BC = a$ cm, $AC = b$ cm), p es el semiperímetro. Calcule el área (en cm^2) de la región triangular ABC, si numéricamente se cumple $p(p - a) + (p - b)(p - c) = 8 \csc(A)$.

- A) $2\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$
C) 4

CLAVE: C

PROBLEMA 5 (5ta PC CEPRE UNI 2014-1)

En un triángulo ABC, las longitudes de sus lados son $AB = c$ cm, $BC = a$ cm, $AC = b$ cm y el área de la región triangular ABC es S (en cm^2). Simplifique la expresión $\frac{2(a - b \cos(C))S}{(a^2 + c^2 - b^2) c \cdot \sin(B)}$ A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

CLAVE: B**PROBLEMA 6 (EXAMEN UNI 2019 - 2)**

En un triángulo ABC, $bc = 8\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} u^2$, y $\sin^6(A) + \cos^6(A) = \frac{5}{8}$ $\left(A < \frac{\pi}{4}\right)$.
Calcule el área de la región triangular (en u^2).

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

CLAVE: B

PROBLEMA 7 (171 del Material de**estudio)**

En un triángulo ABC, S representa el área de la región triangular. Expresa el equivalente de la expresión $b^2 \sin(2A) + a^2 \sin(2B)$ en términos de S.

A) S

B) 2S

C) 3S

D) 4S

E) 5S

CLAVE: D**PROBLEMA 8 (EXAMEN UNI 2019 - 1)**

El menor ángulo de un paralelogramo mide α y sus diagonales miden $2m$ y $2n$. Calcule su área ($m > n$).

A) $(m^2 - n^2)\tan(\alpha)$ B) $(m^2 - n^2)\cot(\alpha)$ C) $(m^2 - n^2)\sec(\alpha)$ D) $(m^2 - n^2)\csc(\alpha)$ E) $(m^2 - n^2)\sin(\alpha)$ **CLAVE: A**

PROBLEMA 9 (6ta PC CEPRE UNI 2019-1)

En un triángulo ABC, donde $BC = a$ u, $AC = b$ u y S u² es el área de su región correspondiente; se cumple

$a^2 + b^2 = 4S$. Calcule el valor de $3\sqrt{2} \tan\left(\frac{C}{2}\right)$

A) $2\sqrt{2}$

D) $5\sqrt{2}$

B) $3\sqrt{2}$

E) $6\sqrt{2}$

C) $4\sqrt{2}$

CLAVE: B

Utilizando la longitud del circunradio y las medidas de sus ángulos interiores

TEOREMA

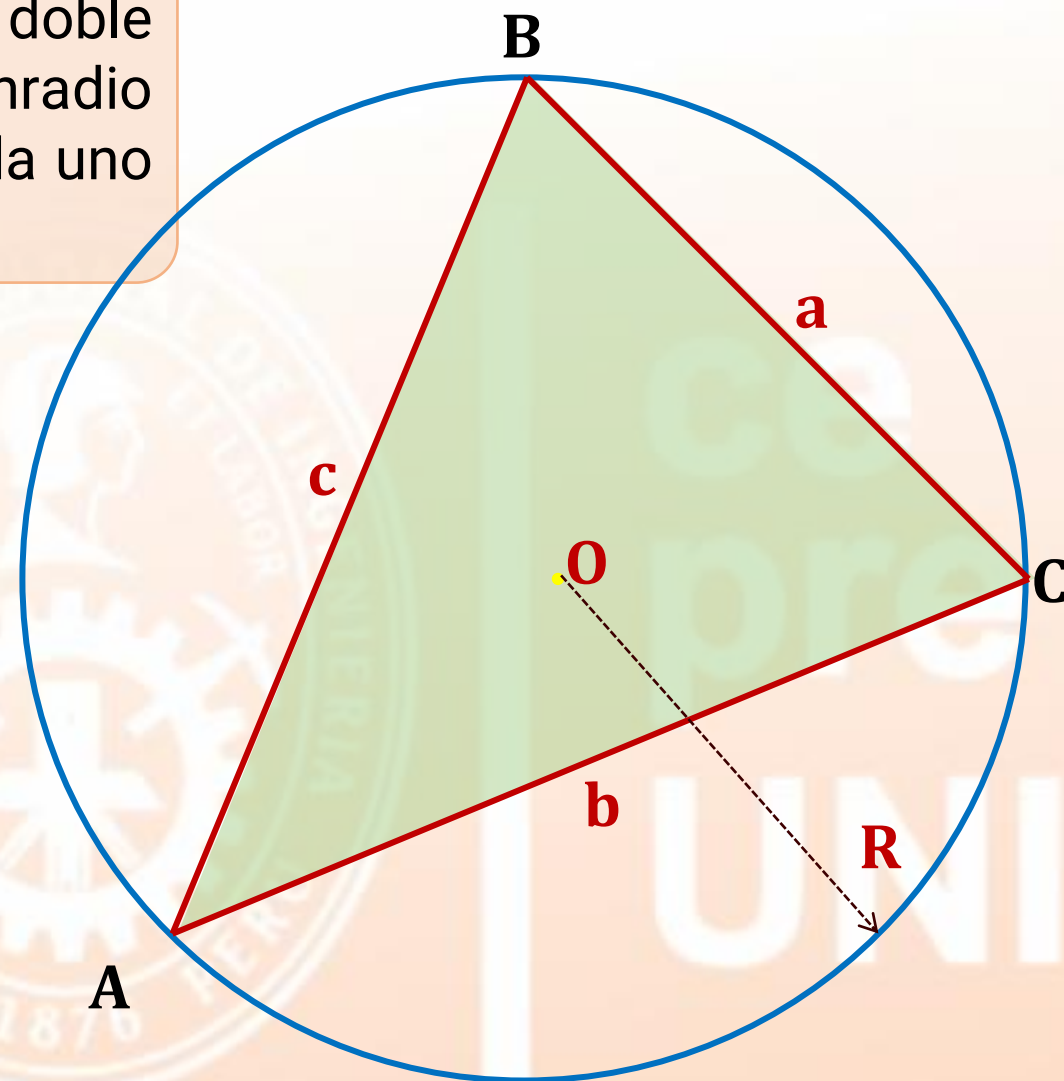
El área de una región triangular es igual al doble producto del cuadrado de la longitud del circunradio por el producto de senos de la medida de cada uno de sus ángulos interiores.

$$S_{ABC} = 2R^2 \text{sen}(A) \text{sen}(B) \text{sen}(C)$$

Demostremos: $S_{ABC} = \frac{a b}{2} \text{sen}(C)$

$$\rightarrow S_{ABC} = \frac{2R \text{sen}(A) \cdot 2R \text{sen}(B)}{2} \cdot \text{sen}(C)$$

$$\therefore S_{ABC} = 2R^2 \text{sen}(A) \text{sen}(B) \text{sen}(C)$$



PROBLEMA 10 (6ta PC CEPRE UNI 2022-2)

Si el área de la región triangular ABC es igual a $8 u^2$, donde $AB = c u$, calcule el valor de la expresión $\frac{c^2 \text{sen}(A) \text{sen}(B)}{\text{sen}(C)}$

- A) 16 B) 10 C) 14 D) 12 E) 8

CLAVE: A**PROBLEMA 11**

En un triángulo ABC, el circunradio mide $4 u$. Si se cumple que $\tan(A) + \tan(B) + \tan(C) = 0,25 \sec(A) \sec(B) \sec(C)$, calcule el área de la región triangular ABC (en u^2).

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

CLAVE: C

PROBLEMA 12

En un triángulo ABC, las prolongaciones de las alturas trazadas desde los vértices A, B y C intersecan a la circunferencia circunscrita en los puntos A', B' y C', respectivamente. Calcule la relación en la que se encuentran las áreas de las regiones triangulares A'B'C' y ABC.

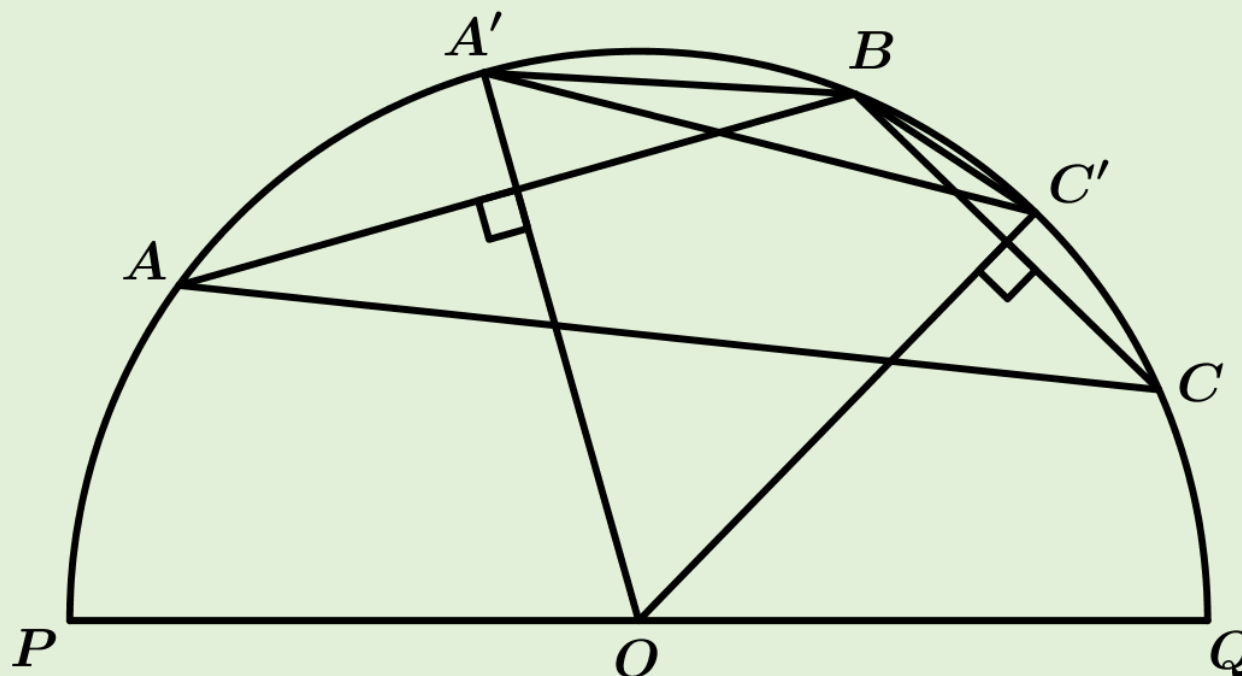
- A) $4\sin(A)\sin(B)\sin(C)$ B) $4\cos(A)\cos(B)\cos(C)$ C) $8\sin(A)\sin(B)\sin(C)$
D) $8\cos(A)\cos(B)\cos(C)$ E) $8\tan(A)\tan(B)\tan(C)$

CLAVE: D

PROBLEMA 13

En la figura mostrada, el diámetro $\overline{PQ}$ de la semicircunferencia de centro O mide $4\sqrt{2}$ cm, $m\angle ABC = 120^\circ$ y $m\angle BAC < m\angle BCA$. Si el área de la región triangular $A'BC'$ es igual a $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2})$ cm², calcule el valor de $\cos(C)$.

- A) $\frac{1}{2}$
- B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
- E) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$


CLAVE: B

Utilizando la longitud del circunradio y las longitudes de sus lados.

TEOREMA

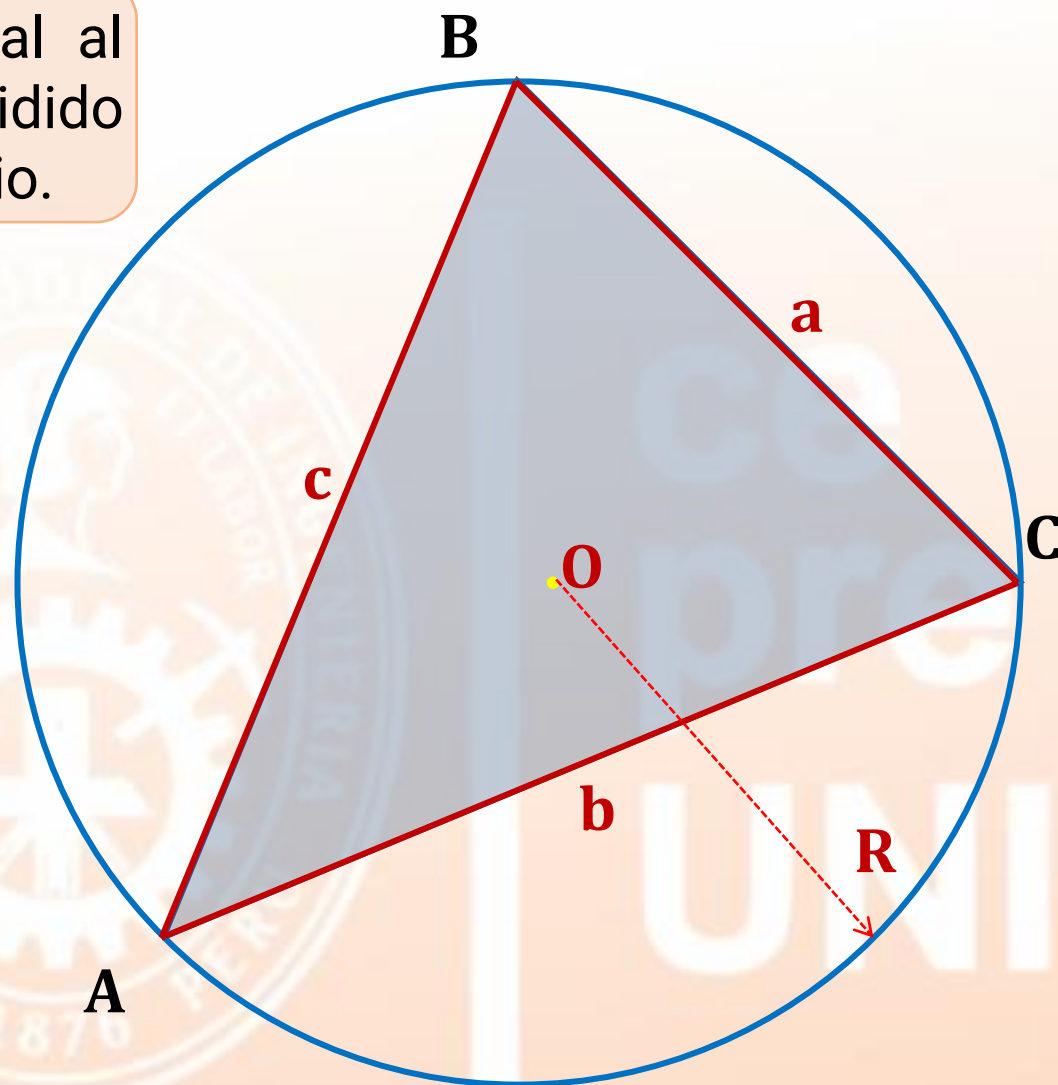
El área de la región triangular ABC es igual al producto de las longitudes de sus lados dividido entre cuatro veces la longitud de su circunradio.

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$$

Para demostrar: $S_{ABC} = \frac{ab}{2} \text{sen}(C)$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{2R}$$

$$\therefore S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$$



PROBLEMA 14

En un triángulo ABC, $AB = c$ cm, $AC = b$ cm y $BC = a$ cm, h_a , h_b y h_c son las longitudes de las alturas relativas a sus lados (en cm), y la suma de estas alturas es 16cm. Calcule el circunradio R si además $ab + bc + ac = 32$.

A) 1

B) 4

C) 6

D) 8

E) 10

CLAVE: A**PROBLEMA 15 (172 del Material de****estudio)**

En un triángulo ABC de lados $AB = c$ u, $BC = a$ u, y $AC = b$ u, si el área de su región triangular igual a $2^{-1} u^2$, calcule el producto de las cosecantes de sus respectivos ángulos internos.

A) abc B) $(abc)^{-1}$ C) $(abc)^2$ D) $(abc)^{-2}$ E) $(abc)^3$ **CLAVE: C**

PROBLEMA 16 (164 del Material de**estudio)**

Se tiene un triángulo ABC, cuyos lados tienen como medida 171u, 195u y 204u. Si S y R representan el valor numérico del área y del circunradio respectivamente de dicho triángulo, calcule el valor de

$$\frac{S}{1539} + \frac{18R}{51}$$

A) 33

B) 39

C) 43

D) 49

E) 53

CLAVE: D

Utilizando la longitud de los lados del triángulo. (Fórmula de Herón)

TEOREMA

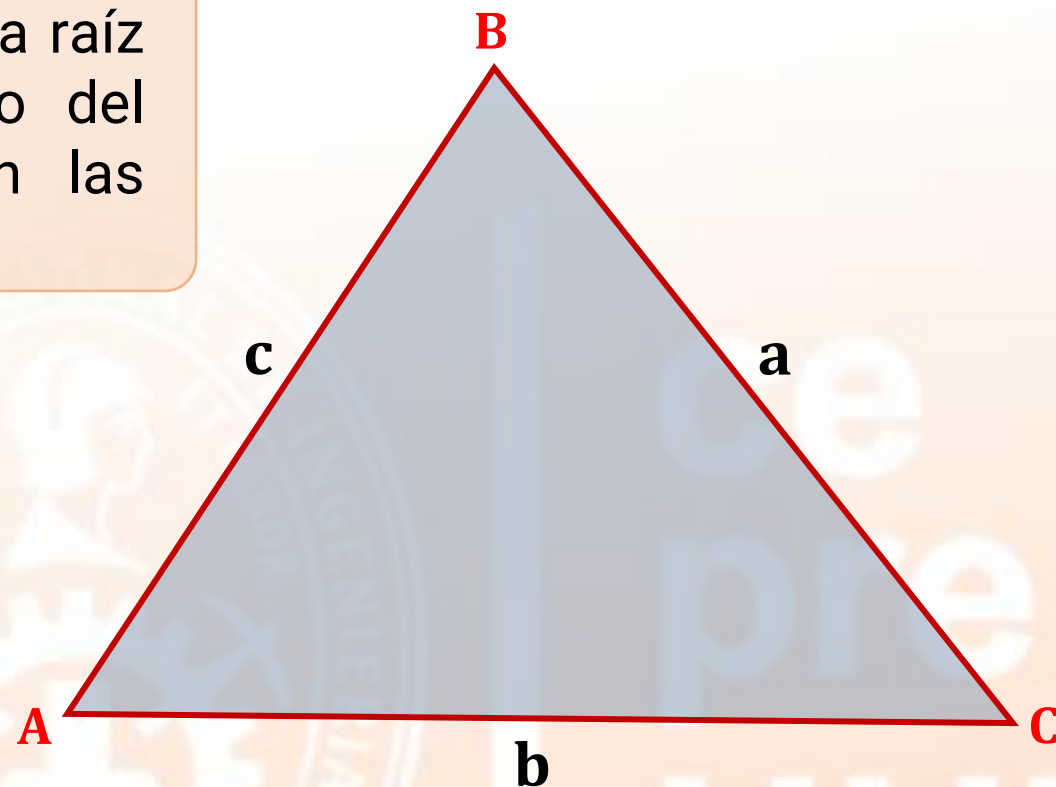
El área de una región triangular es igual a la raíz cuadrada del producto del semiperímetro del triángulo y las diferencias de este con las longitudes de cada uno de los lados

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Demostración: $S_{ABC} = \frac{ab}{2} \sin(C)$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{ab}{2} 2 \sin\left(\frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$S_{ABC} = ab \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$



$$\therefore S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

PROBLEMA 17

En un triángulo ABC, $R = 3r$, donde R es la longitud del circunradio y r , del inradio. Simplifique la expresión $\frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}$

- A) 16 B) 10 C) 14 D) 12 E) 8

CLAVE: D**PROBLEMA 18**

En un triángulo ABC, $BC = a u$, $AC = b u$, $AB = c u$ y p es el semiperímetro.

Simplifique la expresión $4R \left(\sqrt{pabc \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2}\right)} \right)$

- A) abc B) $2abc$ C) $4abc$ D) $6abc$ E) $8abc$

CLAVE: A

**PROBLEMA 19** (166 del Material de estudio)

En un triángulo ABC de área $S = 588 \text{ m}^2$ y de semiperímetro (p) se cumple que $\frac{p-a}{6} = \frac{p-b}{7} = \frac{p-c}{8}$. Calcule el perímetro del triángulo (en m).

- A) $15\sqrt{7}$ B) $37\sqrt{7}$ C) $42\sqrt{7}$ D) $53\sqrt{7}$ E) $64\sqrt{7}$

CLAVE: Cce
pre
UNI



Relaciones auxiliares

1ra RELACIÓN AUXILIAR

Dado el triángulo ABC:

$$\cot(A) = \frac{\cos(A)}{\sin(A)} = \frac{2bc \cdot \cos(A)}{2bc \cdot \sin(A)} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

$$\cot(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

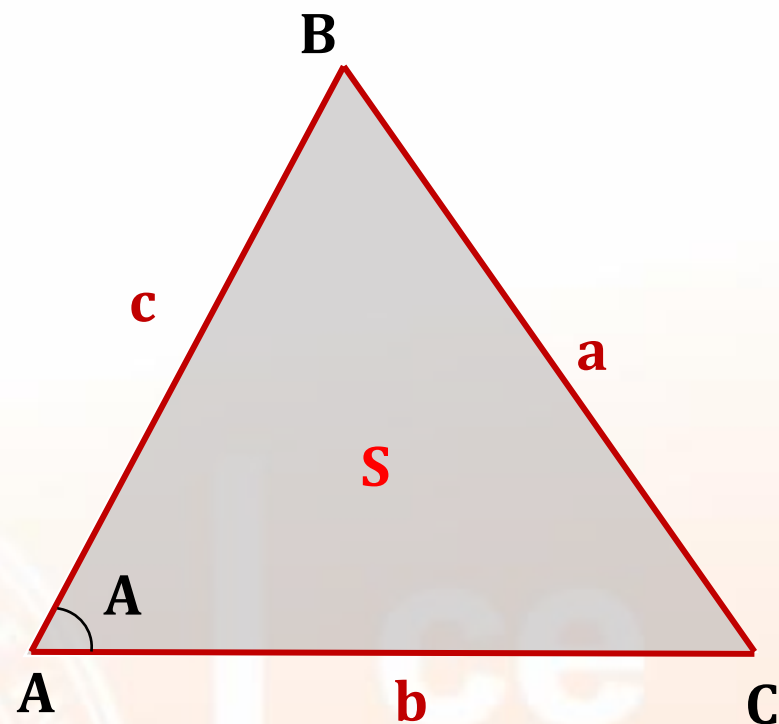
Despejando:

$$S = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\cot(A)}$$

Análogamente:

$$S = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4\cot(B)}$$

$$S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\cot(C)}$$



De las relaciones anteriores, también podemos afirmar que:

$$\cot(A) + \cot(B) + \cot(C) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

$$4S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot(A) + \cot(B) + \cot(C)}$$

$$\cot(A) + \cot(B) = \frac{c^2}{2S}$$

$$\cot(B) + \cot(C) = \frac{a^2}{2S}$$

$$\cot(C) + \cot(A) = \frac{b^2}{2S}$$

$$\cot(A) - \cot(B) = \frac{b^2 - a^2}{2S}$$

$$\cot(C) - \cot(A) = \frac{a^2 - c^2}{2S}$$

$$\cot(B) - \cot(C) = \frac{c^2 - b^2}{2S}$$

PROBLEMA 20 (161 del Material de**estudio)**

En un triángulo ABC de lados $AB = c u$, $BC = a u$, y $AC = b u$ y área de su región triangular igual a Su^2 .

Calcule el valor de $H = S \left[\frac{\cot(A) + \cot(B)}{c^2} + \frac{\cot(C) + \cot(A)}{b^2} + \frac{\cot(C) + \cot(B)}{a^2} \right]$

A) $1/2$

B) 1

C) $3/2$

D) 2

E) $5/2$

CLAVE: D**PROBLEMA 21 (165 del Material de****estudio)**

En un triángulo ABC de lados $AB = c u$, $BC = a u$, y $AC = b u$ y área de su región triangular igual a Su^2 .

Simplifique la expresión $H = \frac{a^2 \cdot (b^2 - a^2)}{(\cot(A) - \cot(B)) \cdot (\cot(B) + \cot(C))}$

A) S^2

B) $2S^2$

C) $3S^2$

D) $4S^2$

E) $5S^2$

CLAVE: D

2da RELACIÓN AUXILIAR

Si recordamos el Punto de Brocard en un triángulo ABC, sabíamos que:

$$\cot(\theta) = \cot(A) + \cot(B) + \cot(C)$$

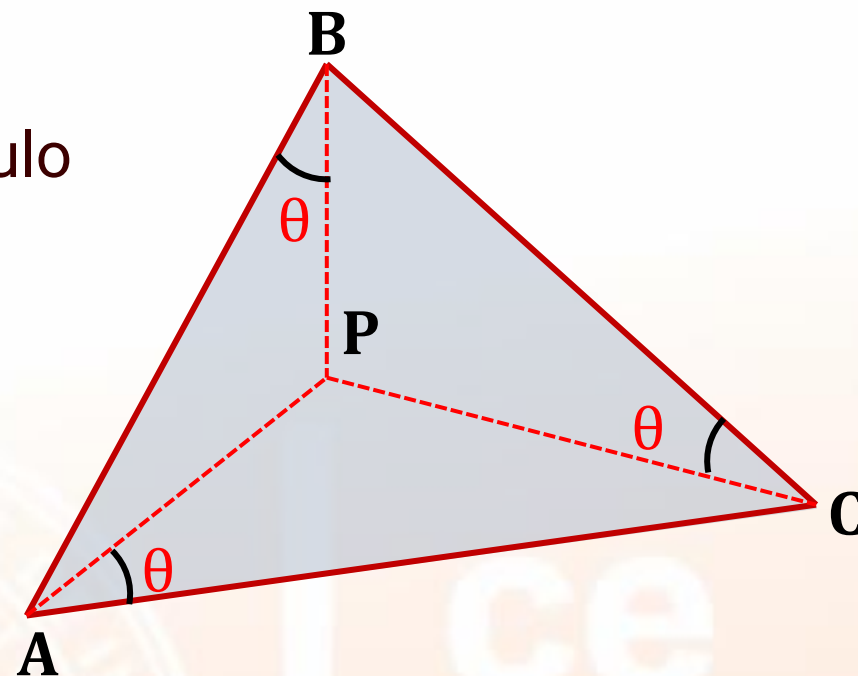
Pero ahora, tenemos la relación adicional:

$$\cot(A) + \cot(B) + \cot(C) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

Entonces, combinando las expresiones::

$$\cot(\theta) = \cot(A) + \cot(B) + \cot(C) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Es decir que se puede calcular la cotangente del ángulo de Brocard utilizando los ángulos del triángulo o las longitudes de los lados del mismo.



PROBLEMA 22

Si en un triángulo ABC, sus lados miden $BC = 7u$, $AC = 6u$ y $AB = 5u$; y su ángulo de Brocard mide θ , calcule $11\tan(\theta)$.

A) $0,6\sqrt{6}$

B) $1,2\sqrt{6}$

C) $1,8\sqrt{6}$

D) $2,4\sqrt{6}$

E) $3,6\sqrt{6}$

CLAVE: D